Benjamin ROTT, Hannover

Der Verlauf von Problembearbeitungsprozessen am Beispiel von Fünftklässlern

Problemlösen ist ein essentieller Bestandteil der Mathematik und daher (auch – aber nicht nur – wegen curricularer Vorgaben) wichtig für die Schule. Ob eine Aufgabe für jemanden ein Problem darstellt oder nicht, hängt von der jeweiligen Person und ihrem Vorwissen ab (vgl. Schoenfeld 1985, S. 74). Wir verwenden daher folgende Definition:

> Eine Aufgabe ist für ihren Bearbeiter (genau) dann eine (mathematische) Problemaufgabe, wenn bei ihrer Bearbeitung ein *Prozess des Problemlösens* stattfindet (im Gegensatz zu einem *Routineprozess*). (Gawlick & Rott, WiSe 2009/10)

Dies verlagert die Entscheidung, ob ein Problem vorliegt, auf den zugehörigen Prozess. Des Weiteren wird hier davon ausgegangen, dass es nur zwei – komplementäre – Typen von Prozessen gibt, Routine- und Problemlöseprozesse (siehe Abb. 1):

> Ein Prozess ist genau dann ein *reiner Routineprozess*, wenn sofort ein Verfahren zur Lösung der gestellten Aufgabe bekannt ist und angewendet wird. Ist dies nicht der Fall oder wird das Verfahren während der Bearbeitung verworfen, handelt es sich um einen *Problemlöseprozess*.

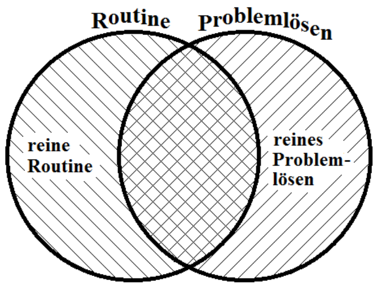

Abbildung 1: Prozesstypen

In der mathematikdidaktischen Literatur zum **Ablauf von Problembearbeitungsprozessen** finden sich vor allem Stufenmodelle. Diese Modelle sind in der Regel *normativ*, d.h. sie geben vor, wie Problemlösen verlaufen könnte; sie beschreiben aber nicht, wie empirisch vorliegende Prozesse ablaufen (*deskriptiv*). Auch bauen fast alle diese Modelle stark auf den vier Stufen von Pólya (1945) auf, wobei insb. die Phasen „(1) Verstehen der Aufgabe“ und „(4) Rückschau“ sich oft sehr ähneln, wohingegen die Phasen „(2) Ausdenken eines Plans“ und „(3) Ausführen des Plans“ variiert werden. In Abb. 2 findet sich je ein Beispiel für ein Modell mit einer zusätzlichen Phase (Schoenfeld 1985, Kap. 4) und für eines, in dem die Phasen (2) und (3) zusammengelegt wurden (Mason, Burton & Stacey 1982).

Als weitere Ergänzungen zu Pólyas Überlegungen betonen neuere Modelle stärker den Einfluss von *Metakognition* beim Phasenwechsel und die Tatsache, dass Prozesse nicht *linear*, d.h. in der von Pólya vorgeschlagenen Reihenfolge verlaufen. Stattdessen wird das *Zyklische* des Problemlösens hervorgehoben, wobei die Modelle solche Schleifen teilweise nur in den ersten zwei Phasen verorten und teilweise nach allen Phasen vorsehen.

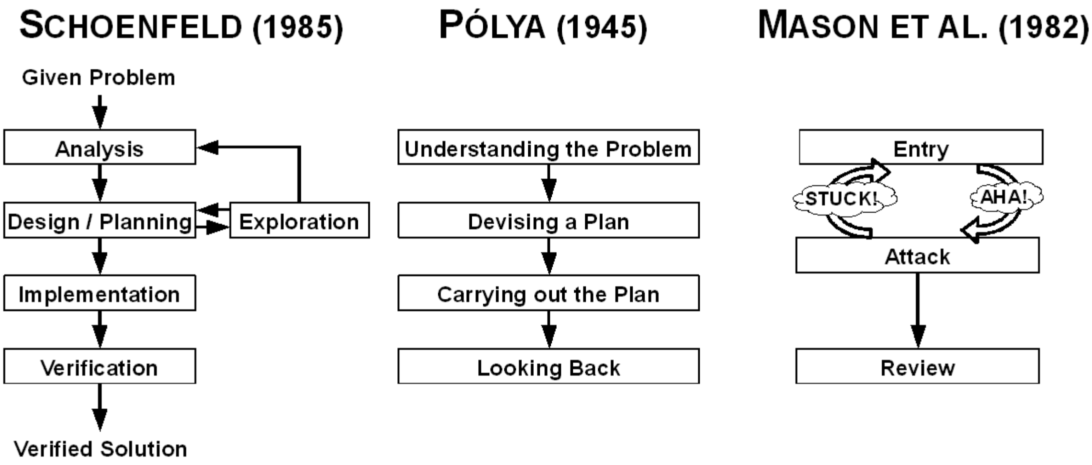

Abbildung 2: Der Problembearbeitungsprozess nach Pólya, Schoenfeld und Mason

Es stellt sich die **Frage**, welche Elemente der Problemlösemodelle am besten geeignet sind, empirisch vorliegende Prozesse zu beschreiben – hier konkretisiert für SchülerInnen der Jahrgangsstufe 5 (Alter: 10 – 12).

Studie und Methoden

Die Basis für die vorliegende Auswertung bildet das Projekt „MALU" für engagierte Fünftklässler Hannoveraner Gymnasien. Die SchülerInnen wurden beim Bearbeiten von Aufgaben in Paaren gefilmt. Näheres zu den Details der Studie und den Aufgaben findet sich z.B. in Rott (2013).

Zur Untersuchung aller Schüler-Prozesse wurde das adaptierte *Protocol Analysis*-Verfahren von Schoenfeld (1985, Kap. 9) verwendet, mit dem die Prozesse in sogenannte *Episoden* eingeteilt werden, die den Phasen auf Abb. 2 (links) entsprechen. Details finden sich z.B. in Rott (2013).

Um Metakognition zu erfassen, haben wir das „Kategoriensystem für metakognitive Aktivitäten" von Cohors-Fresenborg und Kaune (2007) verwendet. Zuvor wurde mithilfe studentischer Abschlussarbeiten sichergestellt, dass es sich, obwohl für die Auswertung von Klassenunterricht entwickelt, auf Paar-Prozesse anwenden lässt. Wegen des hohen Aufwands wurden nur etwa 25% der Prozesse mit diesem Verfahren kodiert.

Ergebnisse

Mit „Das Superauto" haben wir eine Schulbuch-Aufgabe gestellt, die für unsere Schüler leicht zu lösen sein sollte. Und tatsächlich entsprachen 11 der 12 zugehörigen Prozesse der obigen Definition von „reiner Routine". Zusätzlich waren 10 Prozesse der „Schachbrett"-Aufgabe („Wie viele Quadrate finden sich auf einem Schachbrett?" – in diesen Prozessen haben die Kinder die Bearbeitung nach kurzer Zeit mit „64 Quadrate" beendet) von diesem Typ; diese Prozesse sind im Folgenden grau gekennzeichnet.

Da sich die theoretischen Modelle insbesondere in den Pólya-Phasen (2) und (3) voneinander unterscheiden, wird hier ein Schwerpunkt auf die Betrachtung von *Exploration* und *Planning* gelegt (siehe Tabelle 1 und 2).

Aufgabe		**Anzahl der Prozesse**		
Name	**Math. Gebiet**	**mit *Exploration* (davon mit *Planning*)**	**ohne *Exploration***	**gesamt**
Bierdeckel	Geometrie	30 (3)	2	**32**
Marcos Zahlenreihe	Arithmetik	18 (8)	14	**32**
Sieben Tore	Arithmetik	6 (5)	9	**15**
Schachbrett, Problem	Kombinatorik	9 (9)	0	**9**
Schachbrett, Routine	Kombinatorik	0 (0)	10	**10**
Superauto, Routine	Arithmetik	1 (0)	11	**12**
Summe		**63 (25) + 1 (0)**	**25 + 21**	**88 + 22**

Tabelle 1: *Exploration* in den MALU-Prozessen

Aufgabe	**Anzahl der Prozesse**			
	mit *Planning* oder *Planning-Implementation*	**(davon mit explizitem *Planning*)**	**ohne *Planning***	**gesamt**
Bierdeckel	5	(1)	27	**32**
Marcos Zahlenreihe	22	(2)	10	**32**
Sieben Tore	12	(4)	3	**15**
Schachbrett, Problem	7	(0)	2	**9**
Schachbrett, Routine	10	(2)	0	**10**
Superauto, Routine	11	(0)	1	**12**
Summe	**46 + 21**	**(7 + 2)**	**42 + 1**	**88 + 22**

Tabelle 2: *Planning* in den MALU-Prozessen

Wichtig ist auch die Unterscheidung von linearen und zyklischen Verläufen. Die Daten unserer Prozesse zeigt Tabelle 3.

Aufgabe	**Anzahl der Prozesse**			
	linear	***zyklisch***	**(davon nur in Phasen 1 und 2)**	**gesamt**
Bierdeckel	27	5	(4)	**32**
Marcos Zahlenreihe	17	15	(5)	**32**
Sieben Tore	11	4	(3)	**15**
Schachbrett, Problem	3	6	(0)	**9**
Schachbrett, Routine	10	0	(0)	**10**
Superauto, Routine	12	0	(0)	**12**
Summe	**58 + 22**	**30 + 0**	**(12 + 0)**	**88 + 22**

Tabelle 3: Linearität und Nicht-Linearität in den MALU-Prozessen

Aus diesen Ergebnissen wird nun ein Modell abgleitet: Man sieht, dass die Unterscheidung in strukturiertes und unstrukturiertes Planen (*Planning* bzw. *Exploration*) hilfreich ist (Tab. 1). Auch sollten *Planung* und *Ausführung* gemeinsam auftreten können, da explizite *Planung* nur selten in den Fünftklässler-Prozessen feststellbar ist (Tab. 2). Ein Großteil der Prozesse verläuft tatsächlich *linear*, ein empirisches Modell sollte aber auch *zyklische* Prozesse darstellen können – und dabei Schleifen zwischen allen

Problemlösephasen vorsehen (Tab. 3). Schließlich zeigt die Kodierung nach Cohors-Fresenborg und Kaune, dass nahezu alle Phasenübergänge mit metakognitiven Aktivitäten verbunden sind. Das resultierende Modell ist in Abb. 3 (a) dargestellt; lineare Prozesse verlaufen darin niemals aufwärts.

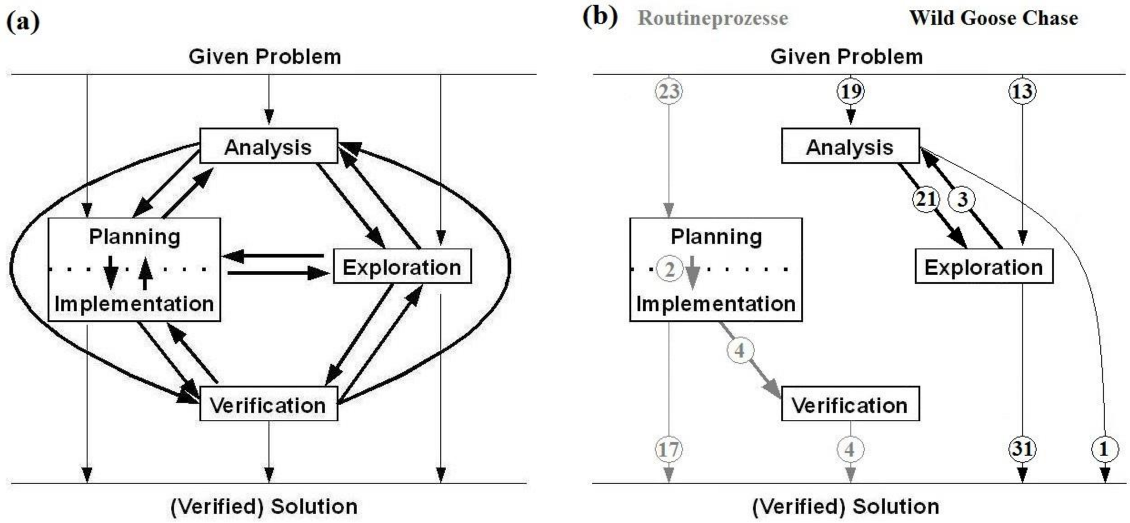

Abbildung 3: (a) Ein empirisches Problemlöse-Modell und (b) Prozesstypen

Diskussion

Mit dem hier vorgestellten Modell lassen sich Prozessverläufe beschreiben und darstellen wie in Abb. 3 (b). Dort wurden – durch Auszählen der Übergänge in den entsprechenden Prozessen – die oben angesprochenen Routineprozesse und alle „Wild Goose Chase“-Prozesse (vgl. Schoenfeld 1985, Kap. 9; Rott 2013) aufgeführt – es ergeben sich für diese Typen charakteristische Bilder: Erstere zeichnen sich durch sofortiges Eintreten in die *Planung* (*-Ausführung*) aus, wohingegen letztere per definitionem nur aus *Exploration* oder *Analysis* & *Exploration* bestehen.

Weitere Untersuchungen, insb. zum Einfluss der Metakognition auf den Erfolg, die Phasenwechsel und wie dies zusammenhängt, sind geplant.

Literatur

Cohors-Fresenborg, Elmar & Kaune, Christa (2007): *Kategoriensystem für metakognitive Aktivitäten beim schrittweise kontrollierten Argumentieren im Mathematikunterricht.* Arbeitsbericht Nr. 44, Institut für Mathematikdidaktik, Universität Osnabrück.

Mason, John; Burton, Leone & Stacey, Kaye (1982): *Thinking Mathematically*. Dorchester: Pearson Education Limited. Second Edition (2010).

Pólya, George (1945): *How to Solve It*. Princeton: University Press.

Rott, Benjamin (2013): *Mathematisches Problemlösen – Ergebnisse einer empirischen Studie*. Münster: WTM.

Schoenfeld, Alan H. (1985): *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.